Géométrie élémentaire du plan

Prérequis :

- *le plan, en tant qu'ensemble de points, et la façon dont, à partir de deux points A et B, on construit $\overrightarrow{AB}$.*
- *le calcul vectoriel.*
- *la notion de distance euclidienne.*
- *l'orthogonalité.*
- *la notion d'angle.*

Notations :

- *$\mathcal{P}$ désigne le plan (affine euclidien).*
- *$\vec{\mathcal{P}}$ le plan vectoriel (c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs du plan $\mathcal{P}$).*

1 Deux modes de repérage dans le plan

1.1 Orientation, bases et repères

Remarques 1.1.1

(i) Il y a deux façons d'**orienter le plan**, c'est-à-dire deux façons d'attribuer le signe positif à un sens de rotation. Traditionnellement, on attribue le signe positif au sens **trigonométrique** (sens inverse des aiguilles d'une montre). Dorénavant $\mathcal{P}$ est orienté.

(ii) Rappelons que toute mesure d'angle n'est définie que modulo 2π et que tout angle admet une unique mesure dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$. Cette mesure est appelée **mesure principale**.

Définition 1.1.2 Soit $(\vec{u},\vec{v})\in\vec{\mathcal{P}}^{\,2}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement s'il existe deux réels α et β non tous les deux nuls tels que :

$$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{0}$$

Remarques 1.1.3

(i) En pratique, lorsqu'on détermine l'éventuelle colinéarité de deux vecteurs, ils sont souvent non nuls. Si par exemple $\vec{u}\neq\vec{0}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement s'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\vec{v}=\lambda\vec{u}$.

(ii) La colinéarité permet de définir la notion de droite : un point $A\in\mathcal{P}$ et un vecteur $\vec{u}$ non nul étant donnés, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires est appelé la droite passant par A et de **vecteur directeur** $\vec{u}$.

(iii) On peut également proposer la définition suivante : un point $A\in\mathcal{P}$ et un vecteur $\vec{n}$ non nul étant donné, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux est une droite. $\vec{n}$ est appelé un **vecteur normal** de cette droite.

Définitions 1.1.4

(i) On appelle **base** du plan tout couple $\mathcal{B}=(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ où $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont deux vecteurs non colinéaires.

(ii) On appelle **base orthogonale** du plan toute base $\mathcal{B}=(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ telle que $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ admette pour mesure principale $\pm\frac{\pi}{2}$.

(iii) On appelle **base orthonormale** du plan toute base orthogonale $\mathcal{B}=(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ telle que $\|\vec{\imath}\|=\|\vec{\jmath}\|=1$.

(iv) On appelle **base directe** (respectivement **indirecte**) du plan toute base $\mathcal{B}=(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ telle que $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ait sa mesure principale dans l'intervalle $]0,\pi[$ (respectivement $]-\pi,0[$).

Définitions 1.1.5

(i) On appelle **repère cartésien** du plan (ou plus simplement repère) tout triplet $\mathcal{R}=(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ où $O\in\mathcal{P}$, et $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est une base.
Le point O est appelé **origine** du repère, les droites passant par O de vecteurs directeurs respectifs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont appelées **axes** du repère : l'axe des **abscisses** d'une part et l'axe des **ordonnées** d'autre part.

(ii) On appelle **repère orthogonal** du plan tout repère $\mathcal{R}=(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ tel que $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est une base orthogonale.

(iii) On appelle **repère orthonormal** du plan tout repère $\mathcal{R}=(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ tel que $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est une base orthonormale.

(iv) On appelle **repère direct** (respectivement **indirect**) du plan tout repère $\mathcal{R}=(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ tel que $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est une base directe (respectivement indirecte).

1.2 Coordonnées cartésiennes

Propriété et définition 1.2.1 Un repère $\mathcal{R}=(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ étant donné, pour tout point $M\in\mathcal{P}$ il existe un unique couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\overrightarrow{OM}=x\,\vec{\imath}+y\,\vec{\jmath}$$

Cet unique couple est appelé **coordonnées cartésiennes** de M dans le repère $\mathcal{R}$.

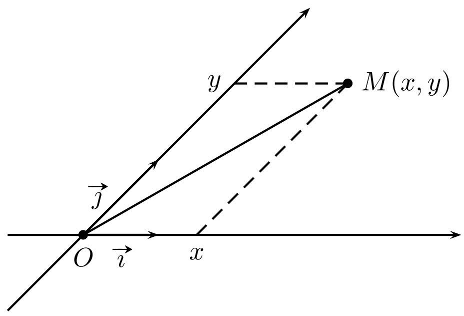
Exercice 1.2.2

1. Démontrer l'unicité dans la démonstration précédente.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les points $M(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}, 1)$ et $N(1, \sqrt{n+1}+\sqrt{n})$ sont tels que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont colinéaires.

Remarques 1.2.3

(i) De la propriété précédente, on déduit qu'il existe une bijection entre le plan $\mathcal{P}$ et $\mathbb{R}^2$. On dit que l'on peut **identifier** le plan $\mathcal{P}$ et l'ensemble $\mathbb{R}^2$. Si de plus le repère choisi est orthonormal direct, on peut également identifier le plan à $\mathbb{C}$.

(ii) L'ensemble $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ des vecteurs du plan est muni d'une structure d'espace vectoriel réel (*cf.* annexe) et tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ s'écrit de façon unique $x\overrightarrow{\imath}+y\overrightarrow{\jmath}$ où $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ est une base de $\mathcal{P}$ et le couple (x, y) est appelé coordonnées de $\overrightarrow{u}$.



Propriété 1.2.4 – Formules de changement de repère orthonormaux directs

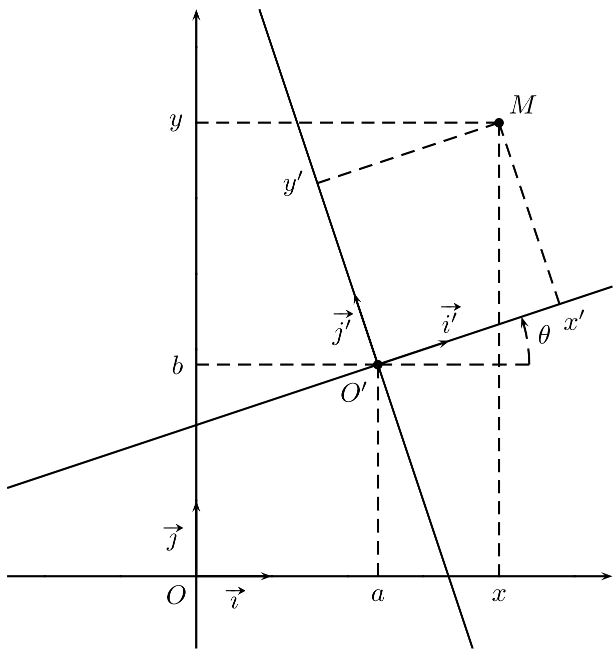
Soient $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ et $\mathcal{R}' = (O'; \overrightarrow{\imath}', \overrightarrow{\jmath}')$ deux repères orthonormaux directs. Pour tout $M \in \mathcal{P}$, on note (x, y) ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ et (x', y') ses coordonnées dans $\mathcal{R}'$. On note (a, b) les coordonnées de O' dans $\mathcal{R}$.

(i) Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que les coordonnées de $\overrightarrow{\imath}'$ et $\overrightarrow{\jmath}'$ dans le repère $\mathcal{R}$ sont :

$$\overrightarrow{\imath}' \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{\jmath}' \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

(ii) x et y vérifient :

$$\begin{cases} x = a + x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = b + x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$



Démonstration : Commençons par démontrer l'existence de θ : $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormal direct $\mathcal{R}$ et ce repère permet d'identifier $\mathcal{P}$ à $\mathbb{C}$. Soit $z \in \mathbb{C}$ l'affixe de $\overrightarrow{\imath}'$, puisque $\|\overrightarrow{\imath}'\| = 1$ on en déduit que $z \in \mathbb{U}$ donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ par conséquent $\overrightarrow{\imath}'$ a pour coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$ dans $\mathcal{R}$.

De plus, puisque $(\overrightarrow{\imath}', \overrightarrow{\jmath}') = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ on en déduit que l'affixe de $\overrightarrow{\jmath}'$ est $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$ donc $\overrightarrow{\jmath}'$ a pour coordonnées $\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)$ soit $(-\sin\theta, \cos\theta)$.

Concernant le point (ii) on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \\
x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} &= a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' \\
x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} &= a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + x'\left(\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}\right) + y'\left(-\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}\right) \\
x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} &= \left(a + x'\cos\theta - y'\sin\theta\right)\vec{\imath} + \left(b + x'\sin\theta + y'\cos\theta\right)\vec{\jmath}
\end{aligned}$$

D'où le résultat par unicité des coordonnées dans un repère.

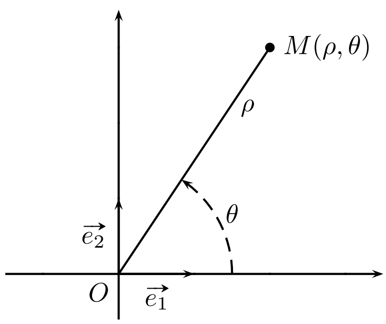
C.Q.F.D.

Exercice 1.2.5 On considère le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et du repère orthonormal $(O, \vec{\imath}', \vec{\jmath}')$, image de $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ par rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

1. Donner les coordonnées de $\vec{\imath}'$ et $\vec{\jmath}'$ dans $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
2. (a) Soit A le point de coordonnées $(1, 2)$ dans $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Quelles sont ses coordonnées dans $(O, \vec{\imath}', \vec{\jmath}')$?
   (b) Soit B de coordonnées $(-2, 3)$ dans $(O, \vec{\imath}', \vec{\jmath}')$. Quelles sont ses coordonnées dans $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$?
3. Soit la courbe d'équation $x^2 - y^2 = 1$ dans $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Quelle est son équation dans $(O, \vec{\imath}', \vec{\jmath}')$? Que peut-on en déduire ?

1.3 Coordonnées polaires

Propriété et définition 1.3.1 Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ un repère orthonormal. Pour tout point $M \in \mathcal{P}$ distinct de O, l'angle $(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM})$ existe, on note θ une mesure de cet angle et on note $\rho = OM$. Réciproquement, pour tout $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, il existe un unique point M tel que $(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}) = \theta$ et $OM = \rho$.



Le couple (ρ, θ) est alors appelé **coordonnées polaires** du point M. ρ est appelé le **rayon polaire** de M et θ l'**angle polaire** de M.

Par convention, on attribue à O les coordonnées polaires $(0, \theta)$ (bien que l'angle entre les vecteurs $\vec{e_1}$ et $\overrightarrow{OO}$) ne soit pas défini) où θ est un nombre réel quelconque. Dorénavant ρ désigne donc un réel supérieur *ou égal* à 0.

Remarque 1.3.2 Il est clair que pour tout $M \in \mathcal{P}$, $\rho = OM$ est unique. Par contre, pour $M \neq O$, θ n'est unique qu'à $2k\pi$ près (avec $k \in \mathbb{Z}$). Autrement dit si M et M' sont deux points distincts de O dont les coordonnées polaires respectives sont (ρ, θ) et (ρ', θ') alors :

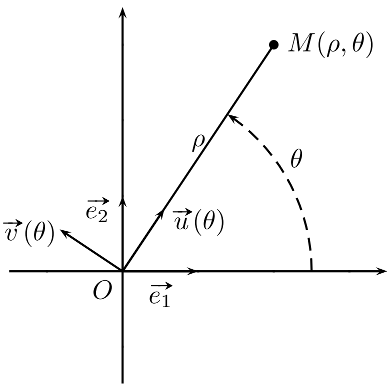
$$M = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \rho' \\ \text{Il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta = \theta' + 2k\pi \end{cases}$$

Définition 1.3.3 Le plan étant muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$, on appelle, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, **repère polaire**, le repère $(O; \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ où $\vec{u}(\theta)$ et $\vec{v}(\theta)$ sont définis par :

$$\begin{cases} \vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{e_1} + \sin\theta\,\vec{e_2} \\ \vec{v}(\theta) = -\sin\theta\,\vec{e_1} + \cos\theta\,\vec{e_2} \end{cases}$$

Autrement dit $\vec{u}(\theta)$ et $\vec{v}(\theta)$ sont les vecteurs d'affixes respectives $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Pour tout point $M \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}(\theta)$ où $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ sont les coordonnées polaires de M.



1.4 Lien entre les deux modes de repérage

La propriété suivante est triviale :

Propriété 1.4.1 Le plan étant muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R}$ et soit $M \in \mathcal{P}$ un point distinct de O dont on note $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ les coordonnées cartésiennes et polaires dans $\mathcal{R}$. On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array} \right.$$

On prendra garde au fait que θ n'est pas nécessairement égal à $\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ou $\arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; cela dépend du quart de plan dans lequel se trouve M.

Exercice 1.4.2 On munit le plan d'un repère orthonormal.

1. On considère les points A, B, C et D dont on donne les coordonnées cartésiennes : $(2, 2)$, $(-\sqrt{3}, 1)$, $(-8, -8\sqrt{3})$ et $D(-6, -1)$. Déterminer les polaires de ces points.
2. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points E et F dont on donne les coordonnées polaires $\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ et $\left(16, -\frac{5\pi}{6}\right)$.

2 Produit scalaire

2.1 Définitions, propriétés

Définition 2.1.1 Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{P}}^{\,2}$. On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel défini par :

(i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

(ii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \; \|\vec{v}\| \; \cos(\vec{u}, \vec{v})$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Définition 2.1.2 Soit d une droite sur laquelle on a choisi *arbitrairement* une orientation et soient A et B deux points sur cette droite. On appelle **mesure algébrique** de AB le réel noté $\overline{AB}$ défini par $\overline{AB} = AB$ si le sens de A vers B est positif et $\overline{AB} = -AB$ si ce sens est négatif.

Remarques 2.1.3

(i) Les mesures algébriques vérifient la **relation de Chasles** : si A, B et C sont trois points alignés et quelle que soit l'orientation choisie sur (AB) on a : $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

(ii) La notion de mesure algébrique est utilisée dans la propriété suivante (admise).

Propriété 2.1.4 – Interprétation en terme de projection

Soient A, B, C et D quatre points du plan tels que $A \neq B$. On note C' et D'les projetés orthogonaux de C et D sur (AB).

Le produit $\overline{AB}\;\overline{C'D'}$ ne dépend pas de l'orientation choisie sur (AC) et :

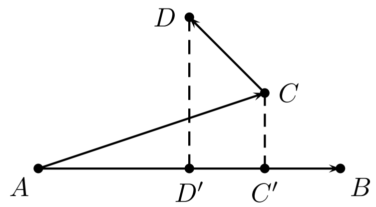
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB}\;\overline{C'D'}$$

Cette relation est encore vrai si $A = B$, C' et D' désignant alors des points quelconques du plan.

Propriété 2.1.5 Soient $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{\mathcal{P}},^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (**symétrie**)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(ii)} & \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \text{ et } \vec{u} \cdot (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) \; \textbf{(linéarité à droite)} \\ \text{(iii)} & (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \text{ et } (\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) \; \textbf{(linéarité à gauche)} \end{array}\right\} \textbf{(bilinéarité)}$$

> Démonstration :
>
> Le point (i) découle de la parité de la fonction cos.
> Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ valent 0.
> Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors on considère des points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{CD}$ et on projette C et D orthogonalement sur (AB) pour obtenir C' et D'. On a alors :
>
> 
>
>
> $$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overline{AB}\;\overline{AD'}$$

Par ailleurs :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overline{AB}\;\overline{AC'}+\overline{AB}\;\overline{C'D'}=\overline{AB}\left(\overline{AC'}+\overline{C'D'}\right)=\overline{AB}\;\overline{AD'}$$

Ceci démontre la première partie du point (ii).
Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Si $\lambda=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors il est clair que $\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})=0=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$.
On suppose que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et λ sont non nuls. Si $\lambda>0$ alors :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})&=\|\vec{u}\|\;\|\lambda\vec{v}\|\;\cos(\vec{u},\lambda\vec{v})=\|\vec{u}\|\;|\lambda|\,\|\vec{v}\|\;\cos(\vec{u},\vec{v})\\&=\lambda\,\|\vec{u}\|\;\|\vec{v}\|\;\cos(\vec{u},\vec{v})=\lambda\,(\vec{u}\cdot\vec{v})\end{aligned}$$

Si $\lambda<0$ alors :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})&=\|\vec{u}\|\;\|\lambda\vec{v}\|\;\cos(\vec{u},\lambda\vec{v})=\|\vec{u}\|\;|\lambda|\,\|\vec{v}\|\;\cos\left((\vec{u},\vec{v})+\pi\right)\\&=-\lambda\,\|\vec{u}\|\;\|\vec{v}\|\;(-\cos(\vec{u},\vec{v}))=\lambda\,\|\vec{u}\|\;\|\vec{v}\|\;\cos(\vec{u},\vec{v})=\lambda\,(\vec{u}\cdot\vec{v})\ \text{ d'où le point (ii).}\end{aligned}$$

Le point (iii) découle aisément de (i) et (ii) :

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{w}\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{w}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$$

Et $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot(\lambda\vec{u})=\lambda(\vec{v}\cdot\vec{u})=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$.

C.Q.F.D.

Exercice 2.1.6 Simplifier autant que possible l'expression $\vec{u}\cdot(\vec{u}+2\vec{v})-2\vec{v}\cdot\vec{u}$.

Propriété 2.1.7 – Expression en base orthonormale
Soient $(\vec{u},\vec{v})\in\vec{\mathcal{P}}^{\,2}$ deux vecteurs de coordonnées cartésiennes (x,y) et (x',y') dans une base orthonormale $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$$

Exercice 2.1.8

1. Démontrer la propriété précédente.
2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'affixes z et z'. Démontrer que $\vec{u}\cdot\vec{v}=\mathfrak{Re}(\bar{z}z')$.
3. À l'aide d'un produit scalaire, démontrer les deux formules suivantes :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad \cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b\qquad \cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$

2.2 Applications

Les deux propriétés suivantes sont très faciles à démontrer :

Propriété 2.2.1 – Application à la perpendicularité
Soient deux droites d et d' de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. d et d' sont perpendiculaires si et seulement si :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

Propriété 2.2.2 – Application au calcul d'angle
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls : $(\vec{u},\vec{v})=\pm\arccos\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\;\|\vec{v}\|}\ (2\pi)$. En pratique, une figure peut permettre de déterminer le signe de la mesure principale de $(\vec{u},\vec{v})$.

Exercice 2.2.3 Déterminer une valeur approchée de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ayant pour coordonnées $(1,4)$ et $(5,-3)$ dans un repère orthonormal direct.

3 Déterminant géométrique

3.1 Définition, propriétés

Définition 3.1.1 Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{P}}^2$. On appelle **déterminant** géométrique de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel défini par :

(i) $\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

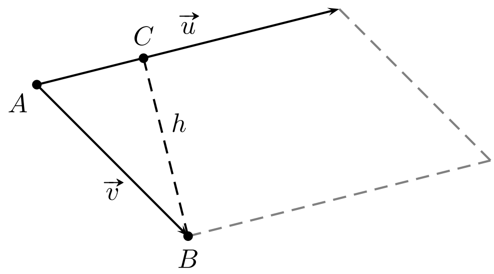
(ii) $\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\| \ \sin(\vec{u}, \vec{v})$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Propriété 3.1.2 – Interprétation comme aire de parallélogramme
Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{P}}^2$, $|\,\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v})|$ est l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Démonstration : Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors l'aire du parallélogramme est nulle. Si les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls alors l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut $\mathcal{A} = \|\vec{u}\| \ h$.

Or $|\,\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v})| = \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\| \ |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$ et la trigonométrie élémentaire dans le triangle rectangle ABC donne $|\sin(\vec{u}, \vec{v})| = \frac{h}{\|\vec{v}\|}$ soit $h = \|\vec{v}\|\,|\sin(\vec{u}, \vec{v})|$ donc $\mathcal{A} = \|\vec{u}\| \ |\sin(\vec{u}, \vec{v})| \ \|\vec{v}\|$ soit finalement :

$$\mathcal{A} = |\,\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v})|$$



C.Q.F.D.

La propriété ci-dessous se démontre par les mêmes méthodes que ce qui a été vu en 2.1.5 :

Propriété 3.1.3 Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{\mathcal{P}}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) $\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = -\,\mathrm{Det}(\vec{v}, \vec{u})$ (**antisymétrie**)

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(ii)} & \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}+\vec{w}) = \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}) + \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{w}) \text{ et} \\ & \qquad \mathrm{Det}(\vec{u}, \lambda\vec{v}) = \lambda\,\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}) \ \textbf{(linéarité à droite)} \\ \text{(iii)} & \mathrm{Det}(\vec{u}+\vec{v}, \vec{w}) = \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{w}) + \mathrm{Det}(\vec{v}, \vec{w}) \text{ et} \\ & \qquad \mathrm{Det}(\lambda\vec{u}, \vec{v}) = \lambda\,\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}) \ \textbf{(linéarité à gauche)}\end{array}\right\} \textbf{(bilinéarité)}$$

Propriété 3.1.4 – Expression en base orthonormale directe
Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{P}}^2$ deux vecteurs de coordonnées (x, y) et (x', y') dans une base orthonormale directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Alors :

$$\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'$$

Exercice 3.1.5

1. Démontrer la propriété précédente.
2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'affixes z et z'. Démontrer que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \mathfrak{Im}(\bar{z}z')$.
3. À l'aide d'un produit scalaire, démontrer les deux formules suivantes :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos b$$

3.2 Applications

Les deux propriétés suivantes sont très faciles à démontrer :

Propriété 3.2.1 – Application à l'alignement et au parallélisme

(i) A, B et C sont alignés si et seulement si $\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$.

(ii) d et d' sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ce qui équivaut encore à :

$$\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

Propriété 3.2.2 – Application au calcul d'angle
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \arcsin \frac{\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} \ (2\pi) \text{ ou } \pi - \arcsin \frac{\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} \ (2\pi)$$

Remarque 3.2.3 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs non nuls, la connaissance de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v})$ permet de calculer (sans figure !) la mesure principale de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 3.2.4 Déterminer une valeur approchée de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ayant pour coordonnées $(-1, 3)$ et $(4, -2)$ dans un repère orthonormal direct.

Définition 3.2.5 Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base du plan et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées (x, y) et (x', y') dans $\mathcal{B}$. On a vu que si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale directe, le réel $xy' - x'y$ est égal au déterminant géométrique des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Si $\mathcal{B}$ est une base quelconque ce n'est en général pas le cas, et on appelle **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$ ce réel.
Il est noté $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$ ou $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$ et se calcule par la règle « du gamma » :

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

Propriété 3.2.6 Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base du plan et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées (x, y) et (x', y') dans $\mathcal{B}$:

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires } \Leftrightarrow \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

Exercice 3.2.7

1. Démontrer la propriété suivante.
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Déterminer t de sorte que $\vec{u}(t, t+1)$ et $\vec{v}(t-4, 2t+1)$ soient colinéaires.

4 Droites

4.1 Deux lignes de niveau

Définition et propriété 4.1.1 Soit $k \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{P}$ et $\vec{u}$ un vecteur du plan non nul. On considère l'application φ suivante :

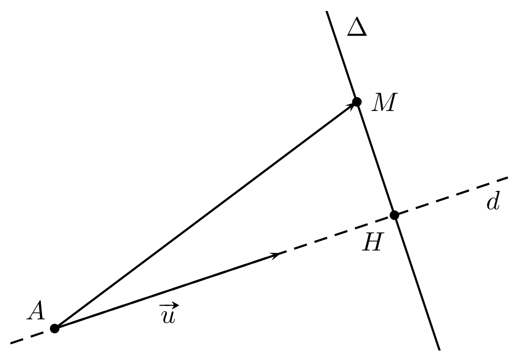
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} \end{array}$$

(i) L'ensemble $\mathcal{E}$ des antécédents de k par l'application φ est appelé **ligne de niveau** de l'application φ :

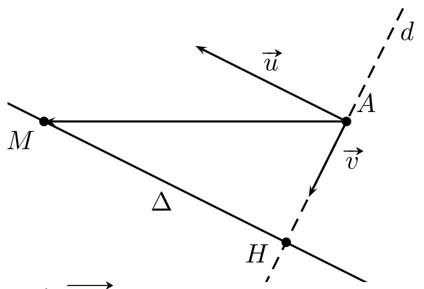
$$\mathcal{E} = \left\{ M \in \mathcal{P} / \ \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k \right\}$$

(ii) Cet ensemble $\mathcal{E}$ est une droite.

> Démonstration : Soit d la droite passant par A, de vecteur directeur $\vec{u}$, orientée par ce dernier. Pour tout $M \in \mathcal{P}$ on note H le projété orthogonal de M sur d, alors $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = \|\vec{u}\| \, \overline{AH}$ ainsi :
>
> $$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k \Leftrightarrow \overline{AH} = \frac{k}{\|\vec{u}\|}$$
>
> Par conséquent l'ensemble des points M tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ est une droite Δ de vecteur normal $\vec{u}$.
>
> C.Q.F.D.



Propriété 4.1.2 Soit $A \in \mathcal{P}$ et $\vec{u}$ un vecteur du plan non nul. Toute ligne de niveau de l'application $M \mapsto \text{Det}(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$ est également une droite.

> Démonstration : Soit $k \in \mathbb{R}$. Notons d la droite passant par A de vecteur normal $\vec{u}$ et orienté par $\vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}$, vecteur non nul tel que $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.
>
> Pour tout $M \in \mathcal{P}$, on note H le projeté orthogonal de M sur d. Alors :
>
> 
>
>
> $$\text{Det}(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \|\vec{u}\|\ AM\ \sin(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \|\vec{u}\|\ \overline{AH}$$
>
> Ainsi :
>
> $$\text{Det}(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = k \Leftrightarrow \overline{AH} = \frac{k}{\|\vec{u}\|}$$
>
> Par conséquent l'ensemble des points M tels que $\text{Det}(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = k$ est une droite Δ de vecteur directeur $\vec{u}$.
>
> **C.Q.F.D.**

4.2 Représentation paramétrique de droite

Dans les paragraphes 4.2 à 4.4, on munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère cartésien (quelconque sauf si mention contraire). Les coordonnées sont données dans ce repère.

Propriétés et définition 4.2.1 Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points distincts et $\vec{u}(\alpha, \beta)$ un vecteur du plan non nul.

(i) La droite d passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) telles qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x = \alpha t + x_A \\ y = \beta t + y_A \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Une telle écriture est appelée **représentation paramétrique** de la droite d.

(ii) La droite (AB) admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = (x_B - x_A)t + x_A \\ y = (y_B - y_A)t + y_A \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

> Démonstration : $M \in d$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, autrement dit si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ soit :
>
> $$\begin{cases} x - x_A = \alpha t \\ y - y_A = \beta t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha t + x_A \\ y = \beta t + y_A \end{cases}$$
>
> Le point (ii) se démontre de façon analogue.
>
> **C.Q.F.D.**

Remarque 4.2.2 Une droite admet plusieurs représentations paramétriques.

Propriété 4.2.3 On munit le plan d'un repère orthonormal.
Soient $A(x_A, y_A)$ et $\vec{n}(a, b)$ un vecteur non nul. La droite d passant par A de vecteur normal $\vec{n}$ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = bt + x_A \\ y = -at + y_A \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

> Démonstration : Il suffit de constater qu'en repère orthonormal $\vec{u}(b, -a)$ et $\vec{n}(a, b)$ sont orthogonaux.
>
> **C.Q.F.D.**

Exercice 4.2.4 Soit A et B de coordonnées $(1, -2)$ et $B(-2, 3)$ dans un repère orthonormal. Déterminer une représentation paramétrique de la médiatrice de $[AB]$.

4.3 Équations cartésienne et polaire de droite

Propriété et définition 4.3.1 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ non tous les deux nuls et soit $c \in \mathbb{R}$.
L'ensemble des points $M(x,y)$ tel que $ax+by+c=0$ est une droite. Une telle écriture est appelée **équation cartésienne de droite**.

Démonstration : Si $b \neq 0$ alors pour tout point $M(x,y)$:

$$ax+by+c=0 \Leftrightarrow y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b} \Leftrightarrow \text{Il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x=t \\ y=-\frac{a}{b}t-\frac{c}{b} \end{cases}$$

On reconnaît la représentation paramétrique de la droite d de vecteur directeur $\vec{u}\left(1,-\frac{a}{b}\right)$ et passant par le point de coordonnées $\left(0,-\frac{c}{b}\right)$.
Si $b=0$ alors $a \neq 0$ et pour tout point $M(x,y)$:

$$ax+c=0 \Leftrightarrow x=-\frac{c}{a} \Leftrightarrow \text{Il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x=-\frac{c}{a} \\ y=t \end{cases}$$

À nouveau, on reconnaît la représentation paramétrique de la droite d de vecteur directeur $\vec{u}\,(0,1)$ et passant par le point de coordonnées $\left(-\frac{c}{a},0\right)$.

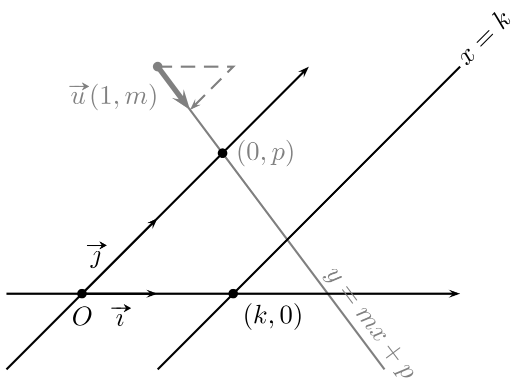
C.Q.F.D.

Remarque 4.3.2 Toute droite admet une équation cartésienne et, comme une représentation paramétrique, celle-ci n'est pas unique.

On déduit facilement de la démonstration précédente que :

Définitions 4.3.3 Selon que b est différent de 0 ou non, $ax+by+c=0$ est équivalent soit à $y=mx+p$ soit à $x=k$ (où $(m,p,k) \in \mathbb{R}^3$). Chacune de ses écritures est appelée **équation réduite de droite**.

Dans le cas où une droite d a pour équation réduite $y=mx+p$, m est appelé **coefficient directeur** et p est appelé **ordonnée à l'origine** de d. $\vec{u}(1,m)$ est un vecteur directeur de cette droite d et elle passe par le point de coordonnées $(0,p)$.
Dans le cas où une droite d a pour équation réduite $x=k$, $\vec{u}(0,1)$ est un vecteur directeur de cette droite d et elle passe par le point de coordonnées $(k,0)$.



Propriété 4.3.4 Soient $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ deux points distincts et $\vec{u}(\alpha,\beta)$ et $\vec{n}(a,b)$ deux vecteurs non nuls.

(i) La droite (AB) a pour équation cartésienne :

$$(y_B-y_A)(x-x_A)-(x_B-x_A)(y-y_A)=0$$

(ii) La droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha,\beta)$ a pour équation cartésienne :

$$\beta(x-x_A)-\alpha(y-y_A)=0$$

(iii) Si le repère est orthonormal, alors la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(a,b)$ a pour équation cartésienne :

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$$

Exercice 4.3.5

1. Démontrer la propriété précédente.
2. Soient $A(1,4)$ et $B(-2,3)$ deux points dont on donne les coordonnées dans un repère orthonormal. Donner une équation cartésienne de la médiatrice de $[AB]$.

Définition 4.3.6 On munit le plan $\mathcal{P}$ du repère $\mathcal{R} = (O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ orthonormal direct. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et la droite d passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha)$ (*cf.* 1.3.3). $d\backslash\{O\}$ est l'ensemble des points de coordonnées polaires $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ telles que $\theta = \alpha\ (\pi)$.

Une telle écriture est appelée **équation polaire** de la droite d passant par O.

4.4 Intersection de deux droites

On détermine l'intersection de deux droites d et d' données par leurs équations cartésiennes $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ en résolvant le système :

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{l} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{array} \right.$$

Ce système, d'inconnues x et y peut avoir un unique couple solution (les droites d et d' sont sécantes en un point dont les coordonnées sont les solutions de $(\mathcal{S})$), aucune solution (les droites d et d' sont strictement parallèles) ou une infinité de solutions (les droites d et d' sont confondues).

Remarques 4.4.1

(i) Les droites d et d' sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs $\vec{u}(-b, a)$ et $\vec{u}'(-b', a')$ sont colinéaires et cela équivaut à (propriété 3.2.6) : $ab' - a'b = 0$. Autrement dit, le système $(\mathcal{S})$ admet une unique solution si et seulement si $ab' - a'b \neq 0$.

(ii) Dans le cas d'équations réduites de la forme $y = mx + p$ et $y = m'x + p$, les droites d et d' sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs $\vec{u}(1, m)$ et $\vec{u}'(1, m')$ sont colinéaires et cela équivaut à $m = m'$.

On peut également rechercher l'intersection de deux droites d et d' telle que d est donnée par une équation cartésienne $ax + by + c = 0$ et d' par une représentation paramétrique $\left\{ \begin{array}{l} x = \alpha t + x_A \\ y = \beta t + y_A \end{array} \right.$. On résout alors le système :

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{l} ax + by + c = 0 \\ x = \alpha t + x_A \\ y = \beta t + y_A \end{array} \right.$$

Pour cela, on remplace dans la première équation, x et y par $\alpha t + x_A$ et $\beta t + y_A$ pour en déduire (si possible) t puis x et y.

Enfin on peut aussi rechercher l'intersection de deux droites d et d' données par leurs représentation paramétriques. On résout alors le système :

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha t + x_A \\ y = \beta t + y_A \\ x = \alpha' u + x_B \\ y = \beta' u + y_B \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha t + x_A = \alpha' u + x_B \\ \beta t + y_A = \beta' u + y_B \\ x = \alpha' u + x_B \\ y = \beta' u + y_B \end{array} \right.$$

Des deux premières équations on déduit (si possible) u que l'on remplace dans les deux dernières pour déterminer x et y.

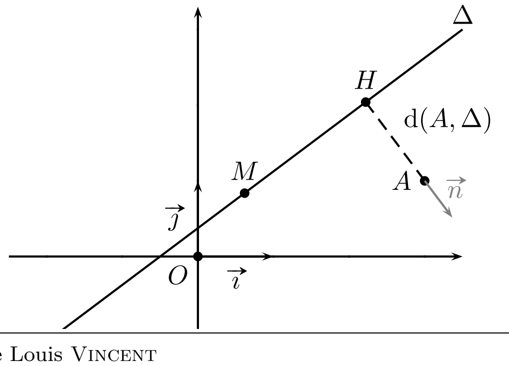
Exercice 4.4.2 Soit $A(1, 1)$, $B(-2, 2)$, $C(0, 4)$ et $D(-1, -2)$. Déterminer les coordonnées de l'intersection de (AB) et (CD).

4.5 Distance d'un point à une droite

Propriété 4.5.1 On se place dans un repère orthonormal.

Soit Δ la droite d'équation cartésienne $ax+by+c = 0$ ($(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, a et b non tous deux nuls) et A le point de coordonnées (x_A, y_A). Alors la distance du point A à la droite d vaut :

$$\mathrm{d}(A, \Delta) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Démonstration : Δ a pour vecteur normal $\vec{n}(a,b)$.

Soit $M(x_M, y_M)$ un point appartenant à d et H le projeté orthogonal de M sur la droite passant par A et perpendiculaire à Δ. Alors $|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}| = AH\ \|\vec{n}\|$. Donc :

$$\mathrm{d}(A,\Delta) = AH = \frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|(x_M - x_A)a + (y_M - y_A)b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax_M - ax_A + by_M - by_A|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Or $ax_M + by_M + c = 0$ donc $ax_M + by_M = -c$ et :

$$\mathrm{d}(A,\Delta) = \frac{|-c - ax_A - by_A|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

C.Q.F.D.

Exercice 4.5.2 Dans un repère orthonormal, déterminer l'ensemble des point équidistants de l'axe des abscisses et de la première bissectrice.

5 Cercles

Dans tout ce paragraphe, on munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère cartésien orthonormal, les coordonnées sont données dans ce repère.

5.1 Équations cartésienne et polaire d'un cercle

Définitions et propriété 5.1.1 Soit $\Omega \in \mathcal{P}$ de coordonnées $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $r \in \mathbb{R}_+$. L'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\Omega M = r$ est appelé **cercle** de centre Ω et de rayon r.

L'ensemble des points $M(x,y)$ tel que $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ est le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon r.

Une telle écriture est appelée **équation cartésienne de cercle**.

Démonstration : $M(x,y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\| = r \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M}^2 = r^2 \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b) = r^2$.

C.Q.F.D.

Remarque 5.1.2 En développant l'expression $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ on obtient une expression du type :

$$x^2 + \alpha x + y^2 + \beta y + \gamma = 0$$

où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ mais réciproquement une telle équation n'est pas nécessairement l'équation d'un cercle. L'ensemble des points de coordonnées (x,y) telles que $x^2 + \alpha x + y^2 + \beta y + \gamma = 0$ peut aussi être réduit à l'ensemble vide (par exempe si $\alpha = \beta = 0$ et $\gamma = 1$).

Exercice 5.1.3 Déterminer si les équations ci-dessous sont celles d'un cercle :

$$x^2 + y^2 - x + 4y + 5 = 0 \qquad x^2 + y^2 - 2x + 3y + 3 = 0$$

Propriété 5.1.4 Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. Le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ a pour équation cartésienne :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

Exercice 5.1.5

1. Démontrer la propriété précédente.
2. (a) Déterminer l'équation du cercle passant par $A(1,0)$, $B(3,2)$ et $C(2,4)$.
   (b) L'axe des abscisses est-il tangent à ce cercle ?

Définition 5.1.6 On munit le plan $\mathcal{P}$ du repère $\mathcal{R} = (O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ orthonormal direct.

Le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$ est l'ensemble des points de coordonnées polaires $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ telles que $\rho = r$. Cette écriture est appelée **équation polaire** du cercle $\mathcal{C}$ de centre O.

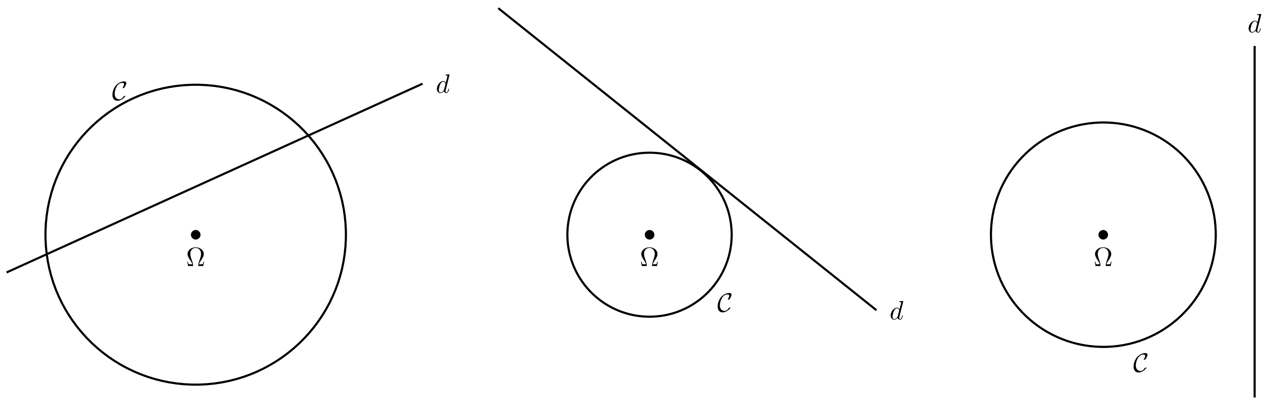
5.2 Intersection d'un cercle et d'une droite

On détermine l'intersection d'un cercle $\mathcal{C}$ et d'une droite d donnés par leurs équations cartésiennes $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ et $ax+by+c=0$ en résolvant le système :

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0 \\ ax+by+c=0 \end{array} \right.$$

On écrit l'équation réduite de d. Si elle est de la forme $x=k$ on est amené à résoudre l'équation du second degré $y^2+\beta y+\gamma+k^2+\alpha k=0$ d'inconnue y. Si elle est de la forme $y=mx+p$ on est amené à résoudre l'équation du second degré $x^2+(mx+p)^2+\alpha x+\beta(mx+p)+\gamma=0$ d'inconnue x.

Selon le nombre de solutions de cette équation du second degré, le système $(\mathcal{S})$ peut avoir deux couples solutions (si $\Delta>0$, la droite d coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points), un unique couple solution (si $\Delta=0$, la droite d est tangente au cercle $\mathcal{C}$), ou aucune solution (si $\Delta<0$, la droite d ne coupe pas le cercle $\mathcal{C}$). On peut aussi déterminer le nombre de solutions en comparant $\mathrm{d}(\Omega,d)$ au rayon du cercle.



Exercice 5.2.1 Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique et $A(4,0)$.
Déterminer les équations des tangentes à $\mathcal{C}$ passant par A.

6 Similitudes du plan

6.1 Définitions et exemples

Définitions 6.1.1

(i) On appelle **transformation du plan** $\mathcal{P}$ toute bijection de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$. Autrement dit une transformation est une application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ tel que tout point $M\in\mathcal{P}$ admet exactement un antécédent par f.

(ii) On appelle **similitude** toute transformation s du plan telle qu'il existe une constante $k\in\mathbb{R}_+^*$ telle que :

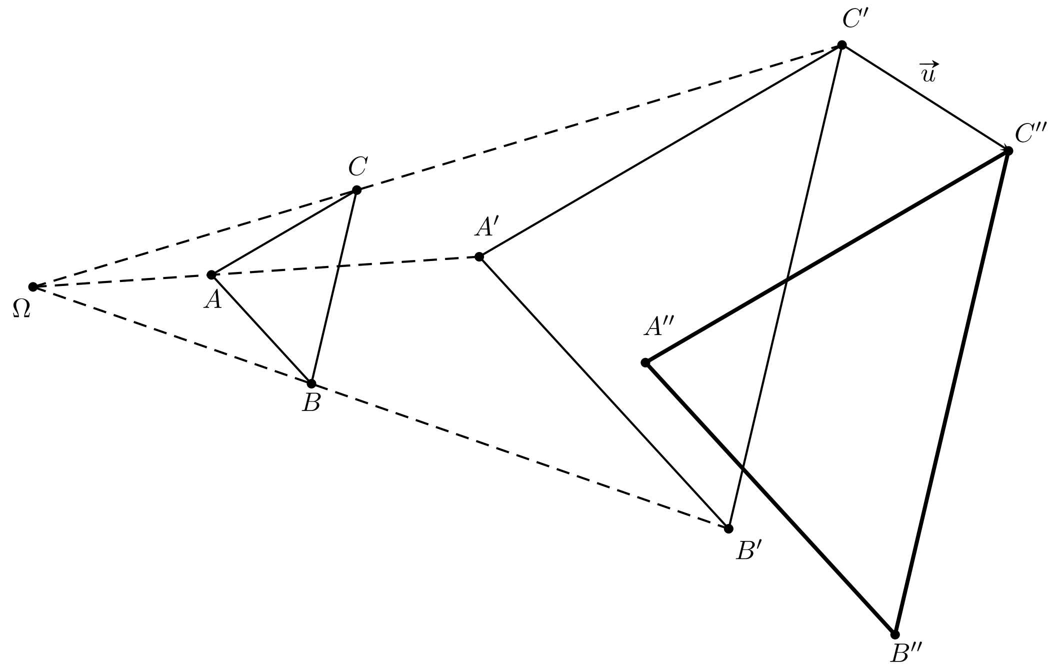
$$\forall (M,N)\in\mathcal{P}^2 \text{ tel que } M\neq N, \quad \frac{s(M)s(N)}{MN}=k$$

Cette constante k est appelé **rapport de la similitude** s.

Remarques 6.1.2

(i) Les translations, symétries centrales, les symétries axiales (on dit aussi réflexion), les homothéties (de rapport $k\neq 0$), les rotations sont des transformations et des similitudes. Mais les projections ne sont pas des transformations.

(ii) On peut composer deux similitudes. La composée de deux similitudes de rapport $k_1\in\mathbb{R}_+^*$ et $k_2\in\mathbb{R}_+^*$ est une similitude de rapport $k_1k_2\in\mathbb{R}_+^*$. On peut par exemple composer une homothétie de rapport $\frac{5}{2}$, de centre $\Omega\in\mathcal{P}$ avec une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, on obtient une similitude de rapport $\frac{5}{2}$:



(iii) Une similitude étant une bijection, elle admet une bijection réciproque. La bijection réciproque d'une similitude de rapport $k \in \mathbb{R}_+^*$ est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$. L'ensemble des similitudes muni de la loi de composition est un groupe.

La propriété suivante est admise :

Propriété 6.1.3

(i) L'image d'un segment, d'une droite, d'un cercle, d'un triangle par une similitude est un segment, une droite, un cercle, un triangle semblable.

(ii) Une similitude laisse invariant les angles géométriques (*i.e.* non orientés).

(iii) Une similitude de rapport $k \in \mathbb{R}_+^*$ multiplie les aires par k^2.

6.2 Écriture complexe d'une similitude directe

Rappelons la définition suivante (*cf.* chapitre 1.I.1) :

Définition 6.2.1 Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

On appelle **similitude directe** l'application s du plan dans lui-même qui à tout point $M \in \mathcal{P}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$ associe $M' \in \mathcal{P}$ d'affixe $z' \in \mathbb{C}$ telle que :

$$z' = az + b$$

Remarques 6.2.2

(i) La définition d'une similitude directe est compatible avec la définition, plus générale, d'une similitude. En effet, on déduit de $a \neq 0$ que s est une bijection du plan dans lui-même et pour tous points M et N distincts on a :

$$\frac{s(M)s(N)}{MN} = \frac{|z'_M - z'_N|}{|z_M - z_N|} = \left|\frac{az_M + b - az_N - b}{z_M - z_N}\right| = \left|\frac{a(z_M - z_N)}{z_M - z_N}\right| = |a|$$

(ii) De plus une simulitude directe conserve non seulement les angles géométriques mais aussi orientés. En effet pour tous points M, N et P deux à deux distincts on a :

$$(\overrightarrow{s(M)s(N)}, \overrightarrow{s(M)s(P)}) = \operatorname{Arg}\frac{z'_P - z'_M}{z'_N - z'_M} = \operatorname{Arg}\frac{az_P + b - az_M - b}{az_N + b - az_M - b} = \operatorname{Arg}\frac{a(z_P - z_M)}{a(z_N - z_M)} = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})\ (2\pi)$$

On a également vu dans le chapitre 1.I.1 la propriété suivante :

Définitions et propriété 6.2.3 Soit s la similitude directe d'écriture complexe $z' = az+b$ $((a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C})$.

(i) Si $a = 1$ alors s est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.

(ii) Si $a \neq 1$ alors il existe un unique $(\Omega, k) \in \mathcal{P} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $s(\Omega) = \Omega$ et pour tout point $M \in \mathcal{P}$ distinct de Ω, son image M' par s est caractérisée par :

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta\ (2\pi) \\ \Omega M' = k\, \Omega M \end{cases}$$

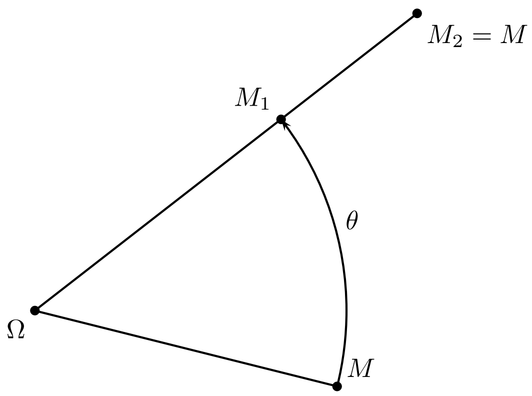
Le point Ω est appelé **centre** de la similitude directe s. Le réel θ est appelé **mesure d'angle** de la similitude s, k est son **rapport**.

Remarque 6.2.4 Rappelons que si $a \neq 1$, on détermine Ω grâce à son affixe ω qui est la solution de l'équation $z = az + b$. s a alors pour écriture complexe :

$$z' - \omega = k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega)$$

La propriété suivante est admise :

Propriété 6.2.5 Soit s la similitude directe d'écriture complexe $z' - \omega = k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega)$ avec $\omega \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. s est la composée commutative de l'homothétie h de centre Ω d'affixe ω et de rapport k et de la rotation r de centre Ω et de mesure d'angle θ.



Remarques 6.2.6

(i) Dans le cas où $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ (c'est-à-dire $\theta = 0\ (\pi)$), la similitude directe d'écriture complexe $z' = az + b$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport a.

(ii) Dans le cas où $a \in \mathbb{U}\backslash\{1\}$ (c'est-à-dire $k = 1$), la similitude directe d'écriture complexe $z' = az + b$ est la rotation de centre Ω et d'angle $\operatorname{Arg} a$.