

Travaux dirigés Signaux n°2. Oscillateur harmonique
Exercices d'application directe
Exercice 1 : Exemples d'oscillateurs

1. On considère un système masse-ressort vertical dans le champ de pesanteur : une masse m est suspendue à un ressort idéal (masse négligeable, longueur à vide l_0 , raideur k), accroché au point fixe O . L'équation donnant l'évolution de l'altitude $z(t)$ de la masse par rapport à l'altitude du point O pris comme référence s'écrit : $m\ddot{z} = -k(z - l_0) + mg$ où g est l'accélération de la pesanteur.
 - a. Cette équation est-elle du type harmonique ?
 - b. La mettre sous forme canonique. En déduire l'expression de la période des oscillations de la masse ainsi que sa position d'équilibre.
2. On considère un pendule pesant : une barre homogène de masse m , de longueur $2L$ est accrochée en une de ses extrémités à un point fixe O . Si la liaison en O est parfaite, l'équation donnant l'évolution de l'angle θ que fait la direction de la barre avec la verticale s'écrit alors :

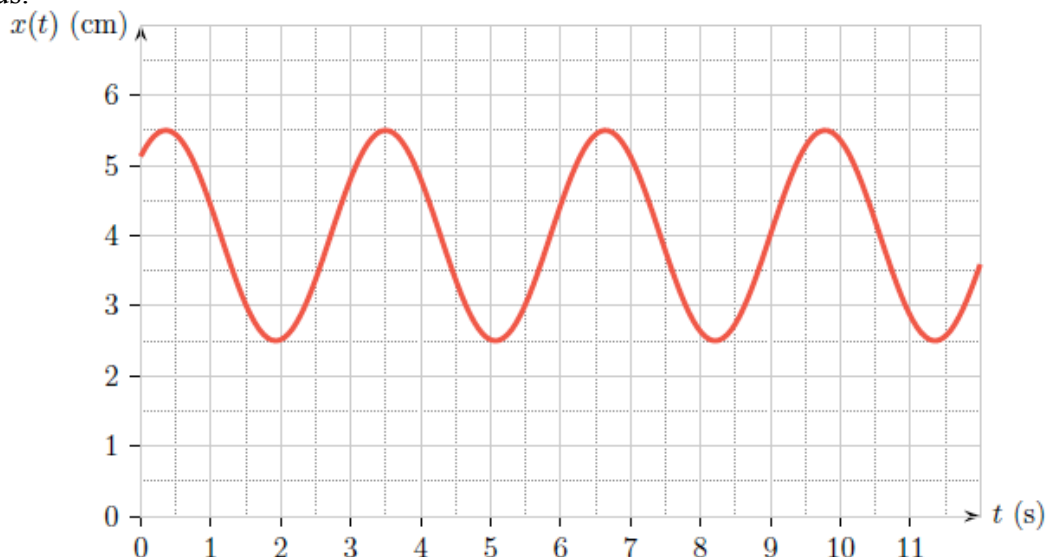
$$\frac{4}{3}mL^2\ddot{\theta} = -mgL \sin \theta.$$
 - a. Cette équation est-elle du type harmonique ?
 - b. Comment est-elle modifiée si l'on considère que les oscillations du pendule sont limitées aux petits angles ?
 - c. En déduire, dans ce dernier cas, l'expression de la période des oscillations ainsi que la position d'équilibre.

Exercice 2 : Un tour en Mettis ...

1. Dans le cadre d'un système Masse + Ressort, rappeler la relation liant la fréquence des oscillations, la masse et la raideur du ressort.
2. Un Mettis vide, de masse $M = 24$ tonnes, passe au dessus d'un dos d'âne. Il oscille alors verticalement à la fréquence $f = 1$ Hz. Au retour, le bus est rempli d'une centaine de passagers de masse moyenne $m = 60$ kg. Quelle sera la fréquence des oscillations après le dos d'âne ?

Exercice 3 : Caractéristiques d'un oscillateur

1. Déterminer l'amplitude, la période, la fréquence et la valeur moyenne du signal représenté ci-dessous.



2. Il s'agit en fait de la longueur $x(t) = l(t)$ d'un ressort de constante de raideur k , relié à un point M de masse $m = 20\text{kg}$. La masse se déplace horizontalement.
- Quelle est la valeur de la position d'équilibre x_{eq} .
 - Estimer la valeur maximale de la vitesse du mobile.
 - Estimer la valeur de l'énergie mécanique du système masse+ressort.
 - Estimer la valeur de la constante de raideur.

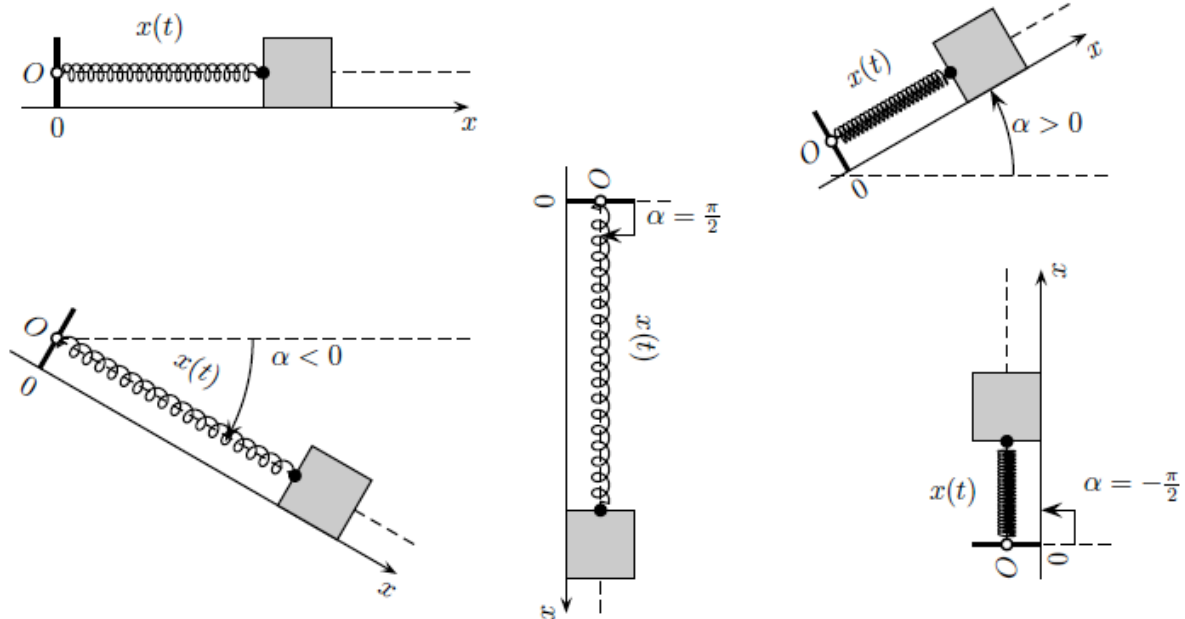
Exercice 4 : Positions d'équilibre

On étudie le système {point M de masse m } lié à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 . On considère le ressort comme idéal et on néglige tout frottement. Le point est repéré par son abscisse x .

- Rappeler l'expression de la longueur à l'équilibre d'un ressort dans le cas où l'axe Ox est horizontal ou vertical.
- Dans le cas où l'axe Ox fait un angle α avec l'horizontale, déterminer par homogénéité et cohérence l'expression de x_{eq} en fonction de m , g , k , l_0 et α .

On fait les propositions suivantes : $x_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k} \cos \alpha$; $x_{eq} = l_0 + \frac{k}{mg} \cos \alpha$; $x_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k} \sin \alpha$ ou

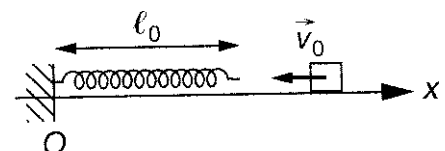
$x_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k} \sin \alpha$. On pourra s'aider des situations ci-dessous.



- Vérifier la cohérence de votre résultat avec les deux cas de la question 1.

Exercice 5 : Amplitude des oscillations d'une masse

Un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 fixé en O est initialement détendu. Une masse m de vitesse $\vec{v} = -v_0 \vec{u}_x$ arrive de la droite et s'accroche au ressort. Le mobile est décrit par son abscisse $x(t)$.



- On s'intéresse au système masse+ressort.
 - Effectuer un bilan des forces.
 - Etablir l'équation différentielle à l'aide du PFD.
 - Résoudre l'équation à l'aide des conditions initiales. En déduire l'amplitude des oscillations.

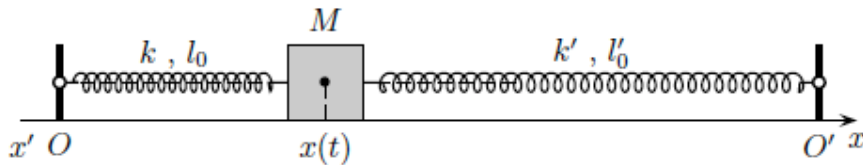
2. Approche énergétique.

- Donner l'expression de l'énergie mécanique du système en fonction de $x(t)$, $v(t)$, m , l_0 et k .
- En exprimant la conservation de l'énergie mécanique, trouver l'amplitude des oscillations et comparer à l'expression trouvée en 1.c.

Pour aller plus loin

Exercice 6 : Masse reliée à deux ressorts

Une masse quasiment ponctuelle m positionnée en M est reliée à deux ressorts fixés en O et O' . Elle glisse sans frottement sur le sol horizontal.



La position de la masse est repérée par son abscisse $x(t)$. Les ressorts ont pour raideurs respectives k et k' et comme longueur à vide l_0 et l'_0 . La longueur OO' est notée L .

- Effectuer un bilan des forces sur la masse.
- Etablir l'équation différentielle du mouvement de la masse à l'aide du PFD.
- Quelle est la position d'équilibre x_{eq} et la pulsation propre du système ?
- Sans résoudre l'équation différentielle, décrire le mouvement de la masse.
- Résoudre l'équation différentielle précédente en considérant qu'initialement $x(0)=x_0$ et $v(0)=0$.